

# Über eine Konvergenzuntersuchung an finiten Elementen

Dirr, Bodo  
Waller, Heinz

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 20, 1968,  
S. 165-179



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Über eine Konvergenzuntersuchung an finiten Elementen\*)

Von Bodo Dirr und Heinz Waller

Vorgelegt von Eduard Pestel

(Eingegangen am 8. 9. 1967)

**Übersicht:** Die Berechnung zweidimensionaler Kontinua wird in neuerer Zeit häufig mit Hilfe finiter Elemente vorgenommen. In der vorliegenden Arbeit wird ein Konvergenzbeweis für eine spezielle Art dieser Elemente, die Gitterrostelemente, vorgelegt. Die benutzte Methode erlaubt ganz allgemein eine Konvergenzuntersuchung auch an anderen finiten Elementen und läßt sich zur Erzeugung von Steifigkeitsmatrizen neuer finiter Elemente verwenden.

*Summary:* In recent years the calculation of two-dimensional continua is often accomplished with the aid of finite elements. In this paper a convergence proof is given for a special type of such elements, the so-called grid elements. The method applied also allows in general a convergence test for other finite elements and can be used for the derivation of stiffness matrices for further finite elements.

## 1. Vorbemerkungen

Scheiben und Platten sind gebräuchliche Konstruktionsteile in der Baustatik sowie im Maschinenbau. Es ist daher schon immer das Anliegen der Elastomechanik gewesen, diese Tragwerke der Berechnung zugänglich zu machen. Mathematisch werden sowohl die Scheibe als auch die Platte durch eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung beschrieben, deren geschlossene Lösung nur für wenige einfache Sonderfälle gelingt. Man ist daher für die Berechnung dieser Tragwerke auf Näherungsverfahren angewiesen. Neben den herkömmlichen Verfahren — Differenzenverfahren, Ritzsches Verfahren u. a. — erfreut sich heute die Methode der finiten Elemente großer Beliebtheit. Dabei wird ein vorgegebenes Kontinuum (Scheibe, Platte, Schale usw.) in eine Anzahl einfach berandeter Modellelemente zerlegt, die das elastische Verhalten des Kontinuums näherungsweise wiedergeben. Diese Modellelemente lassen sich in zwei Gruppen unterteilen:

Die Elemente der ersten Gruppe gewinnt man, indem aus einem Ansatz mit Hilfe mathematischer Funktionen und einem Optimalprinzip nach den Regeln der Variationsrechnung das Verhalten des Elementes bestimmt wird.

Die Elemente der zweiten Gruppe entstehen aus der physikalischen Überlegung, daß ein einfaches, diskontinuierliches Element aus Stäben bestimmte Verformungszustände des Kontinuums exakt beschreiben kann.

---

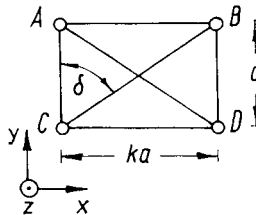
\*) Mitteilung aus dem Lehrstuhl A für Mechanik der Technischen Hochschule Hannover. Die Verfasser danken Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Pestel für die Unterstützung der Arbeit.

Zur zweiten Gruppe gehören auch die Gitterrostelemente, welche erstmals von *Hrennikoff* [1, 2] angegeben worden sind. *Spierig* [3] hat weitere Gitterrostelemente entworfen und eine zusammenfassende Darstellung darüber vorgelegt. Die Elemente der erstgenannten Gruppe werden für die Berechnung von Flächentragwerken in zunehmendem Maße verwendet, während bisher nur wenige Anwendungen von Gitterrostelementen bekannt geworden sind. Zum Teil mag dies daran liegen, daß diese Elemente auf Grund ingenieurmäßiger und weniger mathematischer Überlegungen entstanden sind, und man ihrer Fähigkeit, ein Kontinuum beschreiben zu können, nicht recht traut. In der vorliegenden Arbeit wird — ausgehend von der zusammenfassenden Darstellung von *Spierig* [3] — die Theorie dieser Elemente auf eine mathematische Grundlage gestellt. Mit dem hier dargelegten Vorgehen gewinnt man auch die Möglichkeit, die teilweise umstrittene Güte der so sehr zahlreichen Elemente aus der ersten Gruppe zu untersuchen.

## 2. Begriffe und Definitionen

Wir übernehmen weitgehend die in [3] eingeführten Definitionen und Bezeichnungen auch hier, um dem Leser unnötiges Umdenken zu ersparen und eine

Abb. 1.  
Rechteckiges Gitterrostelement



einheitliche Darstellung zu gewinnen. Die Betrachtungen werden auf ein rechteckiges Gitterrostelement (Abb. 1) beschränkt, gelten aber prinzipiell — wenn auch teilweise modifiziert — ebenso für Elemente anderer Berandungsformen.

Das diskontinuierliche, aus Stäben zusammengesetzte Element (Abb. 1) vermag drei spezielle, sog. homogene Verzerrungszustände exakt nachzubilden (Scheibe: reiner Zug in  $x$ -Richtung, reiner Zug in  $y$ -Richtung, reine Schubverformung; Platte: reine Biegung um die  $x$ -Achse, reine Biegung um die  $y$ -Achse, reine Verwindung). Die Schnittgrößen werden in Kräfte bzw. Momente konzentriert, die an den Ecken  $A \dots D$  angreifen. Die Verträglichkeitsbedingungen sollen allgemein ebenfalls nur an den Ecken des Elementes erfüllt sein, während für einen beliebigen Verzerrungs- bzw. Biegezustand an den Elementenkanten keinerlei Forderungen bezüglich der Stetigkeit geometrischer Größen wie Durchsenkung, Neigung oder gar höherer Ableitungen der Verzerrungs- bzw. Biegefläche beim Übergang von einem Element zum anderen im Gitterrost erhoben werden. Die mathematische Beschreibung der Elemente erfolgt durch Steifigkeitsmatrizen, die in [3] angegeben sind. So gilt für das Rechteckelement

$$f_E = K_E d_E \quad (1)$$

Die positiven Richtungen der Kräfte  $\mathbf{f}$  und der Verschiebungen  $\mathbf{d}$  sind durch das eingeführte Koordinatensystem (Abb. 1) definiert. Die Indizes  $x, y$  und  $z$  bezeichnen bei den Kräften und Momenten die Richtungen der Vektoren.  $\Phi$  ist eine Verdrehung um die  $x$ -Achse,  $\Psi$  eine solche um die  $y$ -Achse. Im einzelnen gilt

bei der Scheibe

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} N_{xA} \\ N_{yA} \\ \vdots \\ N_{xB} \\ N_{yB} \\ \vdots \\ N_{yD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_A \\ \vdots \\ \mathbf{f}_B \\ \vdots \\ \mathbf{f}_C \\ \vdots \\ \mathbf{f}_D \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \vdots \\ u_B \\ v_B \\ \vdots \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \vdots \\ \mathbf{d}_B \\ \vdots \\ \mathbf{d}_C \\ \vdots \\ \mathbf{d}_D \end{bmatrix};$$

bei der Platte

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} M_{xA} \\ M_{yA} \\ Q_{zA} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_A \\ \vdots \\ \mathbf{f}_B \\ \vdots \\ \mathbf{f}_C \\ \vdots \\ \mathbf{f}_D \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Psi_A \\ w_A \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \vdots \\ \mathbf{d}_B \\ \vdots \\ \mathbf{d}_C \\ \vdots \\ \mathbf{d}_D \end{bmatrix} \quad (2)^1$$

Wir werden im folgenden ganz allgemein von den Eckkräften  $\mathbf{f}$  und den Verschiebungen  $\mathbf{d}$  sprechen und nur im Einzelfalle zu beachten haben, wie sie entsprechend Gl. (2) der Scheibe oder der Platte zuzuordnen sind.

### 3. Die Berechnung der Schnittgrößen am Gitterrost

Ein Gitterrost entsteht durch Aneinanderfügen von Gitterrostelementen (Abb. 2). Wir unterscheiden Innenknoten (z. B. 6), Randknoten (z. B. 2 und 5) und Eckknoten (1, 4, 17 und 20). Die Verträglichkeitsbedingung — z. B. für einen Innenknoten — lautet:

$$\mathbf{d}_6 = \mathbf{d}_{ID} = \mathbf{d}_{IIC} = \mathbf{d}_{IIIB} = \mathbf{d}_{IVA} \quad (3)$$

Für die Kräfte gilt an diesem Knoten:

$$\mathbf{f}_6 = \mathbf{f}_{ID} + \mathbf{f}_{IIC} + \mathbf{f}_{IIIB} + \mathbf{f}_{IVA} \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Die Spaltenvektoren sind hier — abweichend von [3] — mit dimensionsbehafteten Größen besetzt. Dies ist im Hinblick auf die Konvergenzuntersuchung praktisch.

Die Gleichungen (3) und (4) stellen die Kopplungsbedingungen für die Elemente des Gitterrostes dar und beinhalten zugleich die Vorschrift für den Aufbau der Steifigkeitsmatrix des Gitterrostes. Ist die Knotenbezifferung entsprechend gewählt, so erhält man stets eine bandförmig in Richtung der Hauptdiagonalen

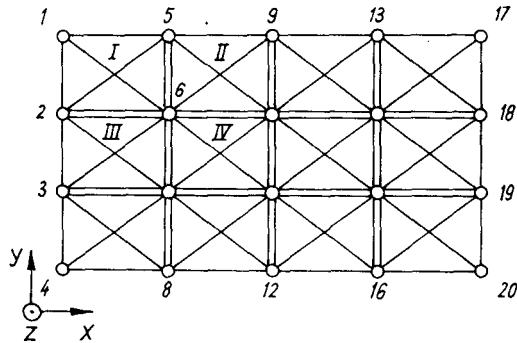


Abb. 2. Rechteckiger Gitterrost, streifenförmig aufgebaut

besetzte Steifigkeitsmatrix. Mit Hilfe der Gleichung (3) werden die Eckpunktverschiebungen der einzelnen Elemente in Knotenverschiebungen des Gitterrostes übersetzt und durch Gl. (4) die inneren Kräfte eliminiert. Somit läßt sich der Gitterrost durch eine der Gl. (1) analoge Beziehung beschreiben

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (5)$$

$\mathbf{f}$  enthält dann die auf die Knoten einwirkenden äußeren Kräfte (Auflagerkräfte, Belastungen, Volumenkräfte usw.) und in  $\mathbf{d}$  sind die Verschiebungen der Knoten — jeweils in der Reihenfolge der eingeführten Knotenbezifferung — enthalten. Nach Einsetzen der Randbedingungen des Problems in Gl. (5) lassen sich dann die Verschiebungen  $\mathbf{d}$  berechnen und anschließend natürlich auch die unbekannten äußeren Kräfte (z. B. Auflagerkräfte) ermitteln.

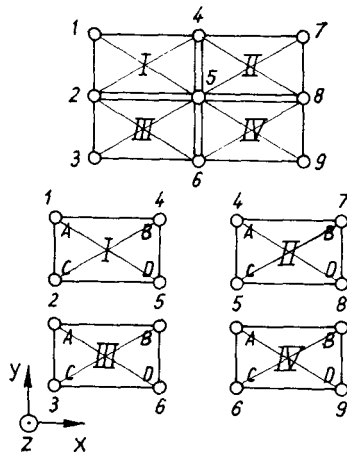


Abb. 3.  
Gitterrost aus vier Elementen  
zur Erläuterung der Schnitt-  
größenberechnung

Zur Berechnung der Schnittgrößen benutzen wir die ermittelten Verschiebungen  $\mathbf{d}$  in Verbindung mit Steifigkeitsmatrizen für Teile des Gitterrostes. Da wir Innen-, Rand- und Eckknoten zu unterscheiden haben, verwenden wir zur Darstellung des Vorgehens einen hinreichenden Teil eines Gitterrostes, z. B. die Elemente I ... IV aus Abb. 2. Dann stellt der Knoten 5 (Abb. 3) einen Innenknoten dar, die Knoten 2, 4, 6 und 8 sind Randknoten und 1, 3, 7 und 9 sind Eckknoten. Zunächst werden der Gitterrost in seine Elemente zerlegt, deren Steifigkeitsmatrizen mit den zugehörigen Eckpunktverschiebungen multipliziert und auf diese Weise die Eckkräfte  $f_{IA}$ ,  $f_{IB}$ ,  $f_{IC}$ ,  $f_{ID}$ ,  $f_{IIA}$  usw. an den Elementen I ... IV berechnet. Im vorliegenden Falle<sup>1)</sup> sind nur zwei Schnitte durch jeden Knoten möglich, so daß durch Zusammenlegen der Elemente III und IV bzw. I und II (pos. und neg. Schnittufer) ein Schnitt in  $x$ -Richtung durch den Rost geführt wird; I und III bzw. II und IV ergeben einen Schnitt in  $y$ -Richtung. Am Knoten 5 sind je nach Schnittführung die entsprechenden Eckkräfte der zusammengefügt Elemente zu einer Knotenkraft  $f_5$  zu addieren, welche die anteilig auf diesen Knoten entfallenden äußeren Kräfte und die Schnittgrößen koordinatenrichtig enthält. Vereinigt man alle vier Elemente, so stellt  $f_5$  die auf den Knoten 5 einwirkende äußere Kraft dar.

Nehmen wir nun vereinfachend an, daß keine äußeren Belastungen vorhanden seien, so repräsentieren die berechneten Knotenkräfte  $f_{IA}$  usw. bereits die unbekannten Schnittgrößen, und wir haben lediglich noch zu entscheiden, wie wir deren längs eines entsprechenden Schnittes im wirklichen Kontinuum unbekannten Verlauf in Knotenkräfte  $f_{IA}$  usw. des Gitterrostes umrechnen wollen. Hierzu ersetzen wir nach Abb. 4 den unbekannten Verlauf, z. B.  $S(x)$ , gedanklich durch eine Treppenkurve, die bei hinreichender Unterteilung des Gitterrostes den wirklichen Verlauf der Schnittgröße beliebig genau approxi-

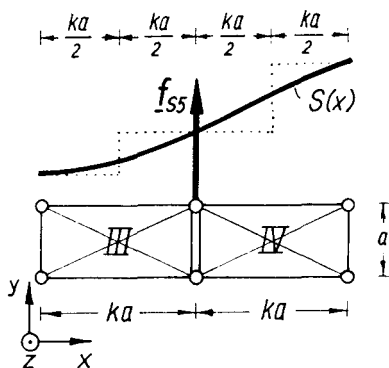


Abb. 4.  
Annäherung des Schnittgrößenverlaufs durch eine Treppenkurve

mieren kann. Die Sprungstellen der Treppenzugnäherung liegen jeweils in der Elementenmitte (Abb. 4), so daß eine einfache Berechnung der Knotenkräfte

<sup>1)</sup> Mit Hilfe von Dreieck- und Trapezelementen lassen sich unregelmäßige Gitterroste aufbauen. Dort bilden die Schnitte im allgemeinen keine Geraden, durch einen Knoten lassen sich u. U. mehr als zwei Schnitte führen. Ein hinreichendes Gleichungssystem mit eindeutiger Lösung ist zur Ermittlung der Schnittgrößen jedoch immer aufstellbar.

— z. B.  $f_{S5}$  — möglich wird. Das Ergebnis dieses Vorgehens lautet auf einen *Innenknoten* angewendet:

für die Scheibe	für die Platte
$\sigma_{x5} = (N_{xID} + N_{xIIIB})/a h$ $= - (N_{xIIC} + N_{xIV A})/a h$	$m_{x5} = (M_{yID} + M_{yIIIB})/a$ $= - (M_{yIIC} + M_{yIV A})/a$
$\sigma_{y5} = (N_{yIIIB} + N_{yIV A})/a h k$ $= - (N_{yID} + N_{yIIC})/a h k$	$m_{y5} = (M_{xID} + M_{xIIC})/a k$ $= - (M_{xIIIB} + M_{xIV A})/a k$
$\tau_{xy5} = (N_{xIIIB} + N_{xIV A})/a h k$ $= (N_{yID} + N_{yIIIB})/a h$ $= - (N_{xID} + N_{xIIC})/a h k$ $= - (N_{yIIC} + N_{yIV A})/a h$	$m_{xy5} = (M_{xIIC} + M_{xIV A})/a$ $= - (M_{xID} + M_{xIIIB})/a$ $= (M_{yIIIB} + M_{yIV A})/a k$ $= - (M_{yID} + M_{yIIC})/a k$
$q_{x5} = (Q_{ID} + Q_{IIIB})/a$ $= - (Q_{IIC} + Q_{IV A})/a$ $q_{y5} = (Q_{IIIB} + Q_{IV A})/a k$ $= - (Q_{ID} + Q_{IIC})/a k$	$q_{x5} = (Q_{ID} + Q_{IIIB})/a$ $= - (Q_{IIC} + Q_{IV A})/a$ $q_{y5} = (Q_{IIIB} + Q_{IV A})/a k$ $= - (Q_{ID} + Q_{IIC})/a k$

(6)

Die Gleichungen (6) geben für den Innenknoten 5 die Schnittgrößen an, wobei der Herleitung Gitterrostelemente gleicher Abmessungen zugrunde liegen. Für einen *Randknoten* sind ganz analoge Überlegungen anzustellen. Am Randknoten 4 ergeben sich für senkrecht zum Rande verlaufende Schnitte

bei der Scheibe	bei der Platte
$\sigma_{x4} = (N_{xIB} - N_{xIIA})/a h$	$m_{x4} = (M_{yIB} - M_{yIIA})/a$
usw.	usw.

(7)

also den Gln. (6) ganz ähnliche Beziehungen. Für parallel zum Rande verlaufende Schnitte gelten am Rande selbst wieder die entsprechenden Gln. (6).

An *Eckpunkten* des Gitterrosts hat man beim Scheibenproblem nur zwei Gleichungen für drei unbekannte Schnittgrößen, beim Plattenproblem drei Gleichungen für fünf unbekannte Schnittgrößen. Somit ist eine Ermittlung der Schnittgrößen an Eckpunkten unmöglich. Entweder extrapoliert man aus den Werten benachbarter Randpunkte, oder man benutzt Zusatzinformation aus den Randbedingungen des Tragwerkes.

Fassen wir nun wieder eine äußere Belastung des betrachteten Knotens 5 ins Auge — wir hatten sie eingangs vernachlässigt —, so ergeben sich bei den Schnittgrößen nach den Gln. (6) Sprünge an den Knoten. Man rechnet dann zweckmäßig mit den algebraischen Mittelwerten der Schnittgrößen weiter, welche sich für das positive und das negative Schnittufer ergeben haben.

#### 4. Konvergenz des Gitterrostverfahrens

Wir wenden uns nach Erledigung der Vorarbeit unserem eigentlichen Anliegen zu, den Zusammenhang zwischen der Differentialgleichung des Tragwerkes und dem Gitterrostverfahren zu untersuchen. Für den Gitterrost gilt Gl. (5), die uns die Verknüpfung der äußeren, auf die Knoten einwirkenden Kräfte mit den Verschiebungen der Knoten angibt.

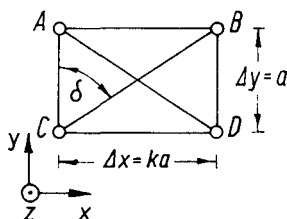
Unter der Voraussetzung, daß die Verformungen des Tragwerkes sich durch stetige Funktionen beschreiben lassen, dürfen wir für die letzteren eine Taylorentwicklung anschreiben:

$$g(x + \Delta x, y + \Delta y) = g(x, y) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right) g(x, y) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n-1} g(x, y) + R_n \quad (8)$$

Wir wählen nun die Schrittweiten  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gleich den Kantenlängen eines Rechteckelementes (Abb. 5)  $ka$  in  $x$ -Richtung bzw.  $a$  in  $y$ -Richtung und

Abb. 5.  
Beziehung zwischen den Schrittweiten der Taylorentwicklung und Abmessungen eines Gitterrostelementes



können mit Hilfe von Gl. (8) die Verschiebungen aller Eckpunkte des Gitterrostelementes durch diejenigen einer „Bezugsecke“ — z. B.  $A$  in Abb. 5 — und ihre Ableitungen ausdrücken.

Faßt man die Eckverschiebungen entsprechend Gl. (2) zusammen, so läßt sich mit

$$\begin{bmatrix} d_A \\ d_B \\ d_C \\ d_D \end{bmatrix} = T_A d_A^* \quad (9)$$

eine Beziehung aufstellen, wo  $T_A$  eine Transformationsmatrix ist, welche im wesentlichen mit den Binomialkoeffizienten der Taylorentwicklung besetzt ist. Zum Beispiel gilt hier für die Ecke  $A$

$$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \cdot 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot 1 & \dots \\ 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \cdot 1 & -1 & \frac{1}{2} \cdot 1 & \dots \end{bmatrix} \quad (10)$$

Der zweite Faktor des Matrizenproduktes auf der rechten Seite von Gl. (9) enthält die Verschiebungen an der Bezugsecke und deren partielle Ableitungen



sowie die zu den Ableitungen gehörigen Potenzen der Schrittweiten, wiederum für die Ecke  $A$  zum Beispiel

$$\mathbf{d}_A^* = \{\mathbf{d}_A, \Delta x \mathbf{d}_{Ax}, \Delta y \mathbf{d}_{Ay}, \Delta x^2 \mathbf{d}_{Axx}, \Delta x \Delta y \mathbf{d}_{Axy}, \dots\} \quad (11)^1$$

Etwa vorkommende Verdrehungen werden durch die Verschiebungen ausgedrückt

$$\Phi = \frac{\delta w}{\delta y} \quad \text{bzw.} \quad \Psi = - \frac{\delta w}{\delta x}. \quad (12)$$

Führt man Gl. (9) in die Gl. (1) ein, so ist durch

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_A^* \\ \mathbf{f}_B^* \\ \mathbf{f}_C^* \\ \mathbf{f}_D^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \mathbf{T}_A \mathbf{d}_A^* \quad (13)$$

ein Vektor gegeben, der nur noch Knotenkräfte enthält, welche von den Verschiebungen der Bezugsecke  $A$  abhängen. Die Ecklasten eines jeden beliebigen Gitterrostknotens können somit allein abhängig von seinen Verschiebungen und deren Ableitungen angegeben werden.

Fassen wir wieder den Gitterrost nach Abb. 3 ins Auge, wo alle möglichen Arten von Gitterrostknoten vorkommen, und wenden die oben geschilderte Vorgehensweise auf die Scheibe und die Platte an. Dabei wird sich zeigen, daß man auf diese Weise prüfen kann, ob die Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix eines Gitterrostelementes so geartet sind, daß die Differentialgleichung des Flächentragwerkes angenähert wird.

### a) Scheibe

Wir wählen den Knotenpunkt 5 in Abb. 3 als Bezugspunkt für die Taylorentwicklung, führen diese bis zur vierten Ableitung einschließlich aus und gelangen zu einer der Gl. (13) entsprechenden Beziehung: ( $k = \Delta x / \Delta y$ ).

Gl. (14) siehe rechte Seite.

In Gleichung (14) ist der Index 5 in den Spaltenvektoren fortgelassen, weil hier ohnehin nur der Knoten 5 betrachtet wird. Der Kraftvektor enthält nach Koordinatenrichtungen getrennt die Eckkräfte der Gitterrostelemente I . . . IV und mit  $\bar{X}$  und  $\bar{Y}$  die entsprechenden Summen aller Eckkräfte am Knoten 5, die zugleich die wirkliche auf diesen Innenknoten einwirkende äußere Kraft repräsentieren. Wir führen

$$X = \frac{\bar{X}}{h a^2 k} \quad \text{und} \quad Y = \frac{\bar{Y}}{h a^2 k} \quad (15)$$

<sup>1)</sup> Der Index  $x$  bzw.  $y$  kennzeichnet eine partielle Ableitung nach  $x$  bzw.  $y$ . Der Spaltenvektor wird zur Platzersparnis als Zeilenvektor geschrieben und durch geschweifte Klammern gekennzeichnet.

(14)
$$\left. \begin{aligned} 6 u_{2x} + 2 u_{2y} + 4 v_{xy} + R_x &= -\frac{16}{3} \frac{X}{E} \\ 4 u_{xy} + 2 v_{2x} + 6 v_{2y} + R_y &= -\frac{16}{3} \frac{Y}{E} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$
$$\left. \begin{aligned} R_x &= \Delta x \Delta y \left[ \frac{1}{2} k u_{4x} - \frac{1}{3} k^2 u_{3x,y} + k u_{2x,2y} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} u_{x,3y} + \frac{1}{6} k u_{4y} + \frac{1}{3} k v_{3x,y} + \frac{1}{3} k v_{x,3y} \right] \\ R_y &= \Delta x \Delta y \left[ \frac{1}{3} k u_{3x,y} + \frac{1}{3} k u_{x,3y} + \frac{1}{6} k v_{4x} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} v_{3x,y} + \frac{1}{k} v_{2x,2y} - \frac{1}{3} k^2 v_{x,3y} + \frac{1}{2} k v_{4y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Entnimmt man einschlägiger Literatur [z. B. 4] die Differentialgleichungen der dünnen Scheibe für den ebenen Spannungszustand, so lauten diese, wenn  $\nu = 1/3$  gesetzt und die hier eingeführte Schreibweise benutzt wird:

$$\begin{aligned} 6 u_{2x} + 2 u_{2y} + 4 v_{xy} &= -\frac{16}{3} \frac{X}{E} \\ 4 u_{xy} + 2 v_{2x} + 6 v_{2y} &= -\frac{16}{3} \frac{Y}{E}. \end{aligned} \quad (18)$$

Ein Vergleich der Gln. (16) und (18) zeigt bis auf  $R_x$  und  $R_y$  Übereinstimmung. Die beiden letzteren verschwinden jedoch zufolge Gl. (17) mit dem Quadrat abnehmender Schrittweite  $\Delta x \Delta y$  und hängen von den vierten und höheren geraden Ableitungen in der Taylorentwicklung ab, wobei für jede gerade und höhere als vierte Ableitung noch einmal zusätzlich der Faktor  $\Delta x \Delta y$  auftritt.

Der Vollständigkeit wegen ist die Konvergenz des Gitterrostverfahrens auch für einen Randknoten zu überprüfen. Fügen wir in Abb. 3 die Elemente III und IV zusammen, so bildet Knoten 5 einen Randknoten. Aus Gleichung (14) lassen sich sofort die Randkräfte für Knoten 5 ermitteln, z. B.

$$N_{x5} = \frac{16}{3 E h} (N_{x\text{III B}} + N_{x\text{IV A}}) \text{ usw.} \quad (19)$$

Dies sind definitionsgemäß Schnittkräfte, von denen die inneren Kräfte abzuziehen sind, um die äußeren Kräfte des Randknotens zu erhalten. Aus der Scheibentheorie ergibt sich — wieder mit  $\nu = 1/3$  — für die inneren Kräfte:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{9 E}{8} \left( v_y + \frac{1}{3} u_x \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{3 E}{8} (u_y + v_x). \end{aligned} \quad (20)$$

Berücksichtigt man Gl. (20) und rechnet Gl. (19) entsprechend um, so entsteht

$$\begin{aligned} -\frac{16}{3} \frac{X}{E} &= (6 u_{2x} + 2 u_{2y} + 4 v_{x,y}) + 2 \Delta y \left( k^2 u_{2x,y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} u_{3y} + \frac{1}{3} k^2 v_{3x} + v_{x,2y} \right) \\ -\frac{16}{3} \frac{Y}{E} &= (4 u_{x,y} + 2 v_{2x} + 6 v_{2y}) + 2 \Delta y \left( \frac{1}{3} k^2 u_{3x} + u_{x,2y} + v_{2x,y} + v_{3y} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

wo  $X$  und  $Y$  wieder auf das Volumen des ganzen Elementes bezogen sind. Erneut haben wir die Differentialgleichungen (18) der Scheibe erhalten, welche in dem vorliegenden Falle jedoch ein anderes Fehlerglied enthalten, als das in Gl. (16) aufgetretene. Es verschwindet aber ebenfalls, wenn die Elementenabmessungen zu Null werden. Den Gleichungen (21) völlig analoge Beziehungen

Da man bei der Bestimmung der Schnittgrößen ebenso vorgehen kann wie hier, erübrigt sich deren gesonderte Untersuchung.

Wir wählen wieder als Bezugspunkt für die Taylorentwicklung den Knotenpunkt 5 der Abb. 3. Die Taylorentwicklung muß jetzt mindestens bis zur sechsten Ableitung einschließlich durchgeführt werden. Damit kommen wir zu den Gln. (22) für die Eckkräfte und Eckmomente der Gitterrostelemente I

bis IV. Die Summe der jeweils zusammengehörigen Eckkräfte und Eckmomente ergibt die äußere Belastung. Für eine mit der Flächenlast  $p$  beaufschlagte Platte gilt

$$M_x = 0 ; \quad M_y = 0 ; \quad Q = P = p \Delta x \Delta y .$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
 & \frac{K}{3} \left( \frac{1}{4k} w_{4x,y} + \frac{2}{3k^3} w_{2x,3y} + \frac{1}{5k^3} w_{5y} \right) \Delta x^4 = 0 \\
 & - \frac{K}{3} \left( \frac{1}{5k} w_{5x} + \frac{2}{3k} w_{3x,2y} + \frac{1}{4k^3} w_{x,4y} \right) \Delta x^4 = 0 \quad (23) \\
 & \frac{K}{3} \left( \frac{3}{k} w_{4x} + \frac{6}{k} w_{2x,2y} + \frac{3}{k} w_{4y} \right) \Delta x^2 + \\
 & + \frac{K}{3} \left( \frac{1}{5k} w_{6x} + \frac{1}{k} w_{4x,2y} + \frac{1}{k^3} w_{2x,4y} + \frac{1}{5k^3} w_{6y} \right) \Delta x^4 = p \Delta x \Delta y = \frac{p}{k} \Delta x^2.
 \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gln. (23) gehen bei Verkleinerung der Schrittweite mit der vierten Potenz der Schrittweite gegen Null. Die dritte Gleichung (23) konvergiert unter Beachtung von  $k = \Delta x / \Delta y$  quadratisch mit kleiner werdender Schrittweite gegen die Differentialgleichung der dünnen, isotropen, elastischen Platte

$$\Delta \Delta w = w_{4x} + 2 w_{2x,2y} + w_{4y} = \frac{p}{K} = p \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3}, \quad (24)$$

wobei in diesem Falle in der Plattensteifigkeit  $K$  für die Querszahl  $\nu = 1/3$  einzusetzen ist. Bei der Rechnung mit endlicher Schrittweite verbleiben Fehlerglieder. In der dritten Gleichung (23) hängt dieses im wesentlichen quadratisch von der Schrittweite ab und dürfte somit bei Plattenberechnungen gegen die Fehlerglieder der beiden ersten Gln. (23) überwiegen.

$$R = \frac{1}{3} \left( \frac{k}{5} w_{6x} + k w_{4x,2y} + \frac{1}{k} w_{2x,4y} + \frac{1}{5k} w_{6y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (25)$$

Zum Nachweis, daß auch die in Abschnitt 3 dargestellte Schnittgrößenberechnung richtige Resultate liefert, wollen wir die Schnittgrößen für den Knotenpunkt 5 (Abb. 3) berechnen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 m_x &= -K \left( w_{2x} + \frac{1}{3} w_{2y} \right) + K \left( \frac{1}{12} w_{4x} + \frac{1}{6} w_{2x,2y} + \frac{1}{36k^2} w_{4y} \right) \Delta x^2 \\
 m_y &= -K \left( \frac{1}{3} w_{2x} + w_{2y} \right) + K \left( \frac{1}{36} w_{4x} + \frac{1}{6k^2} w_{2x,2y} + \frac{1}{12k^2} w_{4y} \right) \Delta x^2 \\
 m_{xy} &= -\frac{2}{3} K w_{x,y} + K \left( \frac{1}{9} w_{3x,y} + \frac{1}{9} w_{x,3y} \right) \Delta x^2 \quad (26) \\
 q_x &= -K (w_{3x} + w_{2x,y}) - K \left( \frac{3}{20k} w_{5x} + \frac{1}{2k} w_{3x,2y} + \frac{1}{4k^3} w_{x,4y} \right) \Delta x^2 \\
 q_y &= -K (w_{2x,y} + w_{3y}) - K \left( \frac{1}{4} w_{4x,y} + \frac{1}{2k^2} w_{2x,3y} + \frac{3}{20k^2} w_{5y} \right) \Delta x^2.
 \end{aligned}$$

Es besteht Übereinstimmung mit den Schnittgrößen der Platte nach der Kirchhoffschen Plattentheorie für eine Quersahl von  $\nu = 1/3$ . Das Fehlerglied hängt quadratisch von der Schrittweite ab. Die Frage nach der richtigen Berücksichtigung der Randbedingungen durch das Gitterrostverfahren ist wegen der auch bei der Schnittgrößenberechnung bestehenden Konvergenz schon geklärt. Geometrische Randbedingungen können ebenso wie Randbedingungen in den Kräften richtig eingesetzt werden.

Man erkennt aus den Gln. (23 und 26), daß Abweichungen von der Quersahl  $\nu = 1/3$  keine prinzipiellen Schwierigkeiten mit sich bringen. Bei der Berechnung eingespannter und frei drehbar gelagerter (Naviersche Randbedingungen) Platten ist die Quersahl nur in der Plattensteifigkeit enthalten, so daß sich die Ergebnisse des Gitterrostverfahrens für diese Lagerungsfälle leicht linear auf andere Quersahlen umrechnen lassen. Liegen kräftefreie Ränder vor, so hängen die Randbedingungen von der Quersahl ab (vgl. Gl. (26)). Es ist jedoch möglich, wenn auch etwas umständlicher, sie auf andere Quersahlen umzuschreiben.

## 5. Folgerungen und zusammenfassende Betrachtungen

Wie schon erwähnt, ist die Zahl von verschiedenen finiten Elementen erstaunlich hoch und ihre Güte für Näherungsberechnungen von Flächentragwerken vielfach umstritten, ja, teilweise ist sogar die Konvergenz bisher nicht erwiesen. Mit Hilfe einer Taylorentwicklung ist es möglich, die Konvergenz finiter Elemente zu überprüfen und Fehlerabschätzungen durchzuführen, welche die Abhängigkeit der Fehlerglieder von den Elementenabmessungen für verschiedene Elemente eindeutig zu beurteilen gestatten, weil die Fehlerglieder linear, quadratisch, kubisch usw. von der Schrittweite abhängen. Wir betrachten dazu beispielsweise das wichtigste Fehlerglied für die Platte:

$$R = \frac{1}{3} \left( \frac{k}{5} w_{6x} + k w_{4x,2y} + \frac{1}{k} w_{2x,4y} + \frac{1}{5k} w_{6y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (25)$$

Da es noch höhere Ableitungen der Auslenkungsfunktion enthält, kann man es nicht zu Genauigkeitsabschätzungen für Rechnungen mit einer endlichen Anzahl von Elementen heranziehen. Bestimmte Verformungszustände werden eben durch bestimmte finite Elemente besonders gut angenähert, nämlich solche, für welche das Fehlerglied infolge kleiner in Frage kommender Ableitungen der Auslenkungsfunktion besonders klein ist. Andere Verformungszustände werden dann durch andere Elemente gut beschrieben. Es ist aber zu vermuten, daß man im allgemeinen um so genauere Ergebnisse erhält, je größer die Potenz der Schrittweite ist, welche als Faktor im Fehlerglied enthalten ist.

Bei der Methode, finite Elemente nach Variationsverfahren zu berechnen, strebt man immer wieder bessere Ergebnisse dadurch an, daß man versucht, den Verformungszustand des Flächentragwerks durch umfangreichere und kompliziertere Funktionenansätze anzunähern. Über die erreichbare Güte der Näherung lassen sich dabei keine Vorhersagen treffen. Stellt man in gezielter

Weise Forderungen an die Genauigkeit, so kann dies geschehen, indem man nicht die Konvergenz finiter Elemente untersucht, sondern die Taylorentwicklung in umgekehrter Weise benutzt, um finite Elemente zu berechnen. Dazu kann man z. B. ausgehen von einer Steifigkeitsmatrix von bestimmter Größe, deren Koeffizienten zunächst unbekannt sind. Unter Zuhilfenahme einer Taylorentwicklung gewinnt man aus den Bedingungen, daß die Differentialgleichungen des Flächentragwerkes angenähert und die Randbedingungen befriedigt werden können, Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix<sup>1)</sup>.

Man stellt also mit den allgemeinen Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix ein Schema von der Art der Gln. (14) oder (22) auf und kann weitere, zusätzliche Bestimmungsgleichungen für die Matrizenkoeffizienten erhalten, wenn man auch an die Fehlerglieder bestimmte Anforderungen stellt. Der Fehler wird sich um so besser minimisieren lassen, je mehr freie Koeffizienten in der zunächst unbekannten Steifigkeitsmatrix vorhanden sind. Diese Eigenart, bei einer Steigerung der Anzahl freier Parameter des Ansatzes einen kleineren Fehler zu erhalten, besitzt auch das Ritzsche Verfahren zur Berechnung finiter Elemente. Dort kann man allerdings nie sicher entscheiden, ob man geeignete Funktionen für den Ansatz gewählt hat.

### Literatur

- [1] *A. Hrennikoff*: Plane Stress and Bending of Plates by Methods of Articulated Framework. Thesis presented at the Massachusetts Institute of Technology, 1940.
- [2] *A. Hrennikoff*: Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method. *Journal of Applied Mechanics*, 8 (1942), pp. A 169—A 175.
- [3] *S. Spierig*: Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten- und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitterrostmodellen. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, Band XV (1963), S. 133—165.
- [4] *A. Föppl und O. Föppl*: *Drang und Zwang*, Band 1. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1920.
- [5] *K. Girkmann*: *Flächentragwerke*. Springer-Verlag, Wien 1948.
- [6] *C. Weber*: Zur punktweisen Berechnung von Scheiben und Platten. *ZAMM* 47 (1967), Heft 3, S. 199—200.

---

<sup>1)</sup> Der Gedanke, in diesem Zusammenhang eine Taylorreihe zu verwenden, ist zuerst in Gesprächen mit *C. Weber* im Jahre 1966 aufgetaucht. *C. Weber* [6] hat dann selbst in einer kurzen Mitteilung zur punktweisen Berechnung von Flächentragwerken unter Verwendung von Taylorreihen Stellung genommen. Dort wird jedoch der Rand des Kontinuums nicht näher untersucht, so daß stets zu wenige Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Koeffizienten entstehen, einige von ihnen somit frei wählbar bleiben. Auf das Verfahren der finiten Elemente nimmt die Mitteilung allerdings nicht Bezug.